

Hierin bedeuten  $\mu$  die effektive Masse des Moleküls,  $V(R)$  die potentielle Energie und  $E_v$  die Energieeigenwerte.

In der Nähe der klassischen Umkehrpunkte  $R_{\min}$  und  $R_{\max}$  ist (A 1) nicht mehr gültig, denn mit verschwindendem  $E_v - V$  wird  $\varphi_v$  unendlich groß. In diesem Gebiet werden die Eigenfunktionen in der Nähe von  $R_{\min}$  durch

$$\varphi_v(R) = \alpha_{\min}^{-1/\nu} \Omega(\alpha_{\min}^{1/\nu} [R - R_{\min}]) \quad (\text{A } 2)$$

und in der Nähe von  $R_{\max}$  durch

$$\varphi_v(R) = (-1)^v \alpha_{\max}^{-1/\nu} \Omega(\alpha_{\max}^{1/\nu} [R_{\max} - R]) \quad (\text{A } 3)$$

gegeben.  $\alpha_{\min, \max}$  ist für jedes  $v$  durch die Steigung der Potentialkurve in den zugehörigen Umkehrpunkten  $R_{\min}$  und  $R_{\max}$  bestimmt.

Die Funktion  $\Omega(\xi)$  ist von VAN DER HELD berechnet worden und in der Arbeit von KRAMERS<sup>25</sup> tabelliert.

Die numerische Rechnung verlangte noch folgende Näherungen:

1. Zur Interpolation der Zwischenwerte der Potentialkurve<sup>9</sup> wurde für  $v' = 0 \dots 13$  ein Polynom durch die gegebenen Punkte der Potentialkurve gelegt, die

weiteren Zwischenwerte wurden durch parabolische Interpolation gewonnen.

2. Die Interpolation der Zwischenwerte der Hilfsfunktion  $\Omega(\xi)$  erfolgte für negatives Argument mittels eines Exponentialansatzes, für positives wurde parabolische Interpolation verwendet.

3. Die Steigung der Potentialkurve zur Bestimmung von  $\alpha_{\min, \max}$  wurde für  $v' = 0$  und 1 graphisch ermittelt. Für größere Schwingungsquantenzahlen  $v'$  fand ein von BEWERSDORFF<sup>26</sup> vorgeschlagenes Verfahren Verwendung, das gleichzeitig einen guten Anschluß der Funktionsteile aneinander gewährleistet. Es wurde der erste und letzte Knoten der Eigenfunktion bei  $R_1$  und  $R_2$  benutzt:

$$\alpha_{\min}^{\nu/3} = \frac{2,34}{R_1 - R_{\min}} \quad \text{und} \quad \alpha_{\max}^{\nu/3} = \frac{2,34}{R_{\max} - R_2}, \quad (\text{A } 4)$$

mit  $\xi = 2,34$  der Nullstelle der Hilfsfunktion  $\Omega(\xi)$ , und an diesen Knoten die Funktionen angeschlossen.

4. Die Schwingungseigenfunktion  $v=0$  des Grundzustandes wurde nach MORSE in geschlossener Form berechnet und die dazu notwendigen spektroskopischen Daten den Tabellen in<sup>27</sup> entnommen.

<sup>26</sup> O. BEWERSDORFF, Z. Phys. **103**, 598 [1936].

<sup>27</sup> G. HERZBERG, Spectra of Diatomic Molecules, D. Van Nostrand Co., Princeton—London—Toronto 1950.

## Oberflächenwellen im Elektronenplasma

D. WAGNER

Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln

(Z. Naturforschg. **21 a**, 634—642 [1966]; eingegangen am 2. Dezember 1965)

The linearized BOLTZMANN—VLASOV-equation is solved for a semi-infinite degenerate plasma and a plasma within a layer. It is shown, that the surface oscillations first discussed by RITCHIE have a linear dependence on the wave vector and are damped.

Die Existenz von Oberflächenwellen in einem Elektronenplasma wurde zuerst von RITCHIE<sup>1</sup> diskutiert. Er zeigte, daß es in einem Halbraum Anregungen mit der Frequenz  $\omega_p/V\sqrt{2}$  gibt, wenn  $\omega_p$  die klassische Plasmafrequenz ist. Diese Anregungen haben den Charakter von Oberflächenwellen. RITCHIE behandelte das Elektronengas im Rahmen der BLOCH-schen hydrodynamischen Gleichungen, die im Vergleich zur BOLTZMANN-Gleichung den Vorteil größerer Einfachheit haben. Jedoch lassen sich die hydrodynamischen Gleichungen nur approximativ aus der korrekteren BOLTZMANN-Gleichung ableiten; dabei

liegt die Problematik in dem hydrostatischen Druckglied der hydrodynamischen Gleichungen<sup>2</sup>, das seinerseits die räumliche Ausbreitung der Wellen im Plasma beschreibt. Daher sind bei der genaueren Behandlung der Oberflächenwellen nach der BOLTZMANN-Gleichung Korrekturen in der Dispersion der Oberflächenwellen zu erwarten. Nach RITCHIE<sup>3</sup> sollte ihre Eigenfrequenz in erster Näherung (lange Wellen) linear vom Wellenvektor abhängen, nach KANAZAWA<sup>4</sup> quadratisch. KANAZAWAS Rechnung folgt der Behandlung der gewöhnlichen Plasmawellen von NOZIÈRES und PINES<sup>5</sup>, und zwar mit der Modifizie-

<sup>1</sup> R. H. RITCHIE, Phys. Rev. **106**, 874 [1957].

<sup>2</sup> V. L. GINZBURG, Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, Verlag Gordon and Breach, New York 1961.

<sup>3</sup> R. H. RITCHIE, Progr. Theor. Phys. **29**, 607 [1963].

<sup>4</sup> H. KANAZAWA, Progr. Theor. Phys. **26**, 851 [1961].

<sup>5</sup> P. NOZIÈRES u. D. PINES, Phys. Rev. **109**, 741 [1958].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

rung, daß die COULOMB-Wechselwirkung zwischen den Elektronen als periodische Funktion angesehen wird. Hierbei ist die Periode durch die Dicke der Schicht gegeben, in die das Plasma eingeschlossen ist. Es ist aber sehr zweifelhaft, ob auf diese Weise ein Rand sinnvoll beschrieben werden kann.

Es ist bekannt, daß die Plasmawellen eines homogenen, unendlich ausgedehnten Plasmas zeitlich gedämpft sind. Die eine Ursache der Dämpfung liegt in den Stößen der Elektronen mit den Ionen des Plasmas. Die andere Ursache ist die LANDAU-Dämpfung, die man als eine CERENKOV-Strahlung der Elektronen im Plasma verstehen kann<sup>2</sup>; sie tritt ein,

wenn die Geschwindigkeit eines Elektrons größer ist als die Phasengeschwindigkeit der Plasmawelle. In der hydrodynamischen Näherung wird die LANDAU-Dämpfung vernachlässigt<sup>2</sup>.

Um diese von den Stößen unabhängigen Effekte zu berücksichtigen, ist es daher nötig, von der BOLTZMANN-Gleichung auszugehen, wie es im folgenden geschieht. Dabei wird angenommen, daß es sich um ein metallisches Elektronengas handelt, so daß man mit vollständiger Entartung rechnen kann. Es werden speziell die auftretenden Oberflächenwellen in einem Halbraum und in einer Schicht untersucht.

## 1. Die Grundgleichungen des Halbraums

Man betrachte einen metallischen Halbraum  $z > 0$ .  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  sei die Verteilungsfunktion der Elektronen,  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , und  $f_0(\mathbf{v})$  die ungestörte FERMI-Verteilung. Dann lautet die linearisierte BOLTZMANN-VLASOV-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{r}}) f_0 + \frac{e}{m} (\mathbf{E}, \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 = -\gamma f \quad (1)$$

mit

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \int f d\mathbf{v}. \quad (2)$$

Dabei ist bekanntlich  $f \ll f_0$  vorausgesetzt worden.

In (2) ist berücksichtigt, daß die ungestörte Verteilung  $f_0$  die Ladung der Ionen, die verschmiert gedacht ist, kompensiert.  $\gamma$  beschreibt summarisch den Einfluß der Stöße der Elektronen mit den Ionen. Das Stoßglied sichert die Konvergenz der auftretenden Integrale. Das Feld  $\mathbf{E}$  schreibt sich nach (2) explizit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' \int f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}'. \quad (3)$$

Gesucht werden die Eigenfrequenzen des Halbraums, also Lösungen von (1) und (3) von der Form

$$f \sim \exp\{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\},$$

wobei  $\mathbf{k}$  ein Vektor in der  $x, y$ -Ebene ist.

Dann ergibt sich aus (1):

$$i(\omega - i\gamma - (\mathbf{k}, \mathbf{v})) f_{\mathbf{k}, \omega} + v_z \frac{\partial f_{\mathbf{k}, \omega}}{\partial z} + \frac{e}{m} (\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}(z), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 = 0 \quad (4)$$

und aus (3)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}(z) = \frac{2\pi e i}{k} \int d\mathbf{v}' \left\{ \int_0^z dz' \boldsymbol{\kappa}^* f_{\mathbf{k}, \omega}(z', \mathbf{v}') e^{-k(z'-z)} + \int_z^\infty dz' \boldsymbol{\kappa} f_{\mathbf{k}, \omega}(z', \mathbf{v}') e^{-k(z'-z)} \right\}, \quad (5)$$

mit  $k = |\mathbf{k}|$  und  $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{k}, i\mathbf{k})$ . (5) ergibt sich aus (3) durch FOURIER-Zerlegung des COULOMB-Potentials. In der Folge wird die Indizierung der FOURIER-Koeffizienten von  $f_{\mathbf{k}, \omega}$  und  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}$  weggelassen und zur Abkürzung  $\tilde{\omega} = \omega - i\gamma - (\mathbf{k}, \mathbf{v})$  gesetzt, so daß stets  $\operatorname{Im} \tilde{\omega} < 0$  ist. Die Behandlung der Gl. (4) verläuft zunächst analog zu der beim anomalen Skineffekt<sup>6</sup>. Die formale Lösung von (4) ist

$$f(\mathbf{v}, z) = \exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z) z\} \left( F(\mathbf{v}) - \frac{e}{m v_z} \int_0^z \exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z) z'\} (\mathbf{E}(z'), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 dz' \right). \quad (6)$$

<sup>6</sup> G. E. H. REUTER u. E. H. SONDEIMER, Proc. Roy. Soc. London A 195, 336 [1948].

$F(\mathbf{v})$  ist eine Funktion der Geschwindigkeiten allein, die sich aus den Randbedingungen ergibt. Wird  $f(\mathbf{v}, z)$  für  $v_z \geq 0$  mit  $f^{\geq}(\mathbf{v}, z)$  bezeichnet, so ist die eine Randbedingung, daß  $f^<$  für  $z \rightarrow \infty$  nicht exponentiell anwachsen darf; daher ist

$$f^<(\mathbf{v}, z) = \frac{e}{m v_z} \int_z^\infty \exp\{i(\tilde{\omega}/v_z)(z' - z)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 dz'. \quad (7)$$

Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion der Elektronen, die die Metalloberfläche verlassen, wird angenommen, daß ein Bruchteil  $p$  der auf die Wand auftreffenden Elektronen spiegelnd reflektiert wird, so daß  $v_z$  nur das Vorzeichen ändert, und daß ein Bruchteil  $1-p$  diffus reflektiert wird, so daß dieser Bruchteil nach der Reflexion die ungestörte Verteilung  $f_0$  hat. Die Randbedingung für die Elektronen, die den Metallrand bei  $z=0$  verlassen, ist daher:

$$f_0 + f^>(v_z, z=0) = p(f_0 + f^<(-v_z, z=0)) + (1-p)f_0, \quad (8a)$$

wenn  $f_0 + f^{\geq}(v_z, z=0)$  die noch nicht FOURIER-transformierte Verteilungsfunktion der Elektronen am Rand mit  $v_z \geq 0$  ist. Geht man wieder zur FOURIER-Transformierten über, so ist

$$f^>(v_z, z=0) = p f^<(-v_z, z=0). \quad (8b)$$

Diese Beschreibung des Rands hat sich in der Theorie des anomalen Skineffekts<sup>6</sup> bewährt und wird übernommen. Damit erhält man

$$\begin{aligned} f^>(\mathbf{v}, z) &= -\frac{e}{m v_z} \int_0^z \exp\{i(\tilde{\omega}/v_z)(z' - z)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 dz' \\ &\quad - p \frac{e}{m v_z} \int_0^\infty \exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z)(z' + z)\} (\mathbf{E}(z'), \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}) f_0 dz'. \end{aligned} \quad (9)$$

$\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}$  unterscheidet sich von  $\nabla_{\mathbf{v}}$  durch ein negatives Vorzeichen in der  $z$ -Komponente. Integriert man (7) und (9) über die Geschwindigkeit, so erhält man als Bestimmungsgleichung für die FOURIER-Komponente der Dichte  $n(z) = \int f d\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} n(z) &= -\frac{e}{m} \int_{v_z>0} \frac{d\mathbf{v}}{v_z} \int_0^z dz' \exp\{i(\tilde{\omega}/v_z)(z' - z)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 \\ &\quad + \frac{e}{m} \int_{v_z<0} \frac{d\mathbf{v}}{v_z} \int_z^\infty dz' \exp\{i(\tilde{\omega}/v_z)(z' - z)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 \\ &\quad + p \frac{e}{m} \int_{v_z<0} \frac{d\mathbf{v}}{v_z} \int_0^\infty dz' \exp\{i(\tilde{\omega}/v_z)(z' + z)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla_{\mathbf{v}}) f_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Legt man noch die Normierung der ungestörten Verteilungsfunktion durch  $\int f_0 d\mathbf{v} = n_0$  fest, wobei  $n_0$  die ungestörte Elektronendichte ist, so enthalten die Gln. (5), (10) und (11) die Lösungen des Halbraums.

## 2. Der Fall $\mathbf{k}=0$

Im einfachsten Fall,  $k=0$ , lassen sich die Integrale über die Geschwindigkeit in (10) teilweise ausführen. Beachtet man, daß  $f$  nur vom Betrag  $|\mathbf{v}|=v$  abhängt und daß in dem hier allein interessierenden Fall der vollständigen Entartung  $\partial f_0 / \partial v$  durch eine  $\delta$ -Funktion an der FERMI-Kante ersetzt wird, so erhält man nach einigen partiellen Integrationen aus (5), (10) und (11) (vgl. Anhang):

$$n(z) = \frac{3}{2} i \frac{\omega_p^2}{\omega v_F} \left\{ \int_0^\infty dz' n(z') (K(|z-z'|) + p K(z+z')) - \frac{p+1}{2} K(z) \int_1^\infty n(z') dz' \right\}, \quad (12)$$

wobei

$$K(z) = \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} \exp\{-i(\omega/v_F) z s\} \quad (13)$$

ist. Die Stoßdämpfung ist in der Frequenz  $\omega$  enthalten und  $v_F$  ist die FERMI-Geschwindigkeit. Im Fall spiegelnder Reflexion,  $p=1$ , lässt sich die Integralgleichung (12) über den Halbraum offenbar in eine über den ganzen Raum verwandeln, wenn man  $n(-z)=n(z)$  definiert:

$$n(z) = \frac{3}{2} i \frac{\omega_p^2}{\omega v_F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz' n(z') K(|z-z'|) - \frac{1}{2} K(|z|) \int_{-\infty}^{+\infty} n(z') dz' \right\}. \quad (14)$$

Diese Gleichung ist (12) offenbar äquivalent, wenn  $p=1$  ist. (14) lässt sich durch FOURIER-Transformation lösen.

Mit

$$n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{kz} \exp\{-i k_z z\} dk_z, \quad n_{kz} = n_{-kz}$$

und

$$\begin{aligned} K(k_z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(|z|) \exp\{i k_z z\} dz = \frac{2i\omega}{k_z^2 v_F} - \frac{i\omega^2}{k_z^3 v_F^2} \ln \frac{\omega+k_z v_F}{\omega-k_z v_F} \\ &= -\frac{2}{3} i \frac{v_F}{\omega} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k_z^2 v_F^2}{\omega^2} \dots\right) \quad \text{für } \left|\frac{k_z v_F}{\omega}\right| \ll 1 \end{aligned} \quad (15)$$

erhält man aus (14) :

$$n_{kz} \left(1 - \frac{3}{2} i \frac{\omega_p^2}{\omega v_F} K(k_z)\right) = -\frac{3}{4} i \frac{\omega_p^2}{\omega v_F} K(k_z) n_0. \quad (16)$$

a)  $n_0=0$  ergibt die Dispersionsrelation der gewöhnlichen Plasmawellen

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + \frac{3}{5} \frac{k_z^2 v_F^2}{\omega_p^2} \dots\right) \quad \text{für } \left|\frac{k_z v_F}{\omega_p}\right| \ll 1. \quad (17)$$

Die Eigenlösungen sind ebene Wellen, die senkrecht zur Oberfläche laufen („normale“ Plasmonen<sup>4</sup>). Das Feld im Außenraum  $z<0$  verschwindet nach (5).

b)  $n_0 \neq 0$  führt nach (16) auf die Dispersionsrelation

$$1 = \frac{3}{4} i \frac{\omega_p^2}{\omega v_F} K(0) \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2}, \quad (18)$$

wenn man wieder von den Stößen absieht. Die zugehörende Lösung klingt im wesentlichen exponentiell mit dem Abstand vom Rand ab, Teil 3, und ist somit eine Oberflächenwelle. (15) ist die zuerst von RITCHIE<sup>1</sup> angegebene Eigenfrequenz der Welle. Nach (5) ist das Feld dieser Welle im Außenraum  $\neq 0$ .

Der allgemeine Fall  $p<1$  ist mathematisch schwieriger, da die Integralgleichung auf den Halbraum  $z>0$  beschränkt bleibt. Zwar lassen sich bekanntlich solche Integralgleichungen durch LAPLACE-Transformation auf ein HILBERTSCHES Randwertproblem zurückführen<sup>7</sup>, jedoch scheint das – anders als bei der Theorie des anomalen Skin-Effekts<sup>6</sup> – hier nicht weiterzuhelpen. Auf die Diskussion dieses Falles wird daher im folgenden verzichtet, zumal ein Vergleich mit anderen Autoren ohnehin auf  $p=1$  beschränkt bleiben müsste.

### 3. Der Fall $k \neq 0$

Setzt man (5) in (10) ein, so erhält man nach einigen partiellen Integrationen aus (10) mit (11) und für  $p=1$  (vgl. Anhang) :

$$n(z) = \int_0^\infty K_0(z, z') n(z') dz' + K_1(z) \int_0^\infty n(z') e^{-kz'} dz', \quad (19)$$

<sup>7</sup> W. I. SMIRNOW, Lehrgang der Höheren Math. IV, § 58, Berlin 1961. — N. I. MUSKHELISHVILI, Singular Integral Equations, Groningen 1953.

wobei  $K_0(z, z') = -\frac{4\pi i e^2}{m} \omega \int_{v_z > 0} d\mathbf{v} \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2} (\exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z)|z-z'|\} + \exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z)(z+z')\})$  (20)

und  $K_1(z) = \frac{4\pi e^2 i}{m} \omega \int_{v_z > 0} d\mathbf{v} \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2} \exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z)z\}$

ist. Man definiert  $n(-z) = n(z)$  und kann die Integralgleichung (19) wegen der spiegelnden Reflexion wieder über die ganze  $z$ -Achse erstrecken. Nach FOURIER-Transformation erhält man aus (19) mit (20) für den FOURIER-Koeffizienten der Dichte die Gleichung:

$$n_{k_z}(1 + A(k, k_z)) = A(k, k_z) \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_{k_z'}}{k^2 + k_z'^2} dk_z' \quad (21)$$

mit

$$A(k, k_z) = \frac{4\pi e^2}{m} \omega \int d\mathbf{v} \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2} \frac{1}{\tilde{\omega}^2 - k_z^2 v_z^2}. \quad (22)$$

Speziell für  $k=0$  erhält man daraus mit (15)

$$A(0, k_z) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{K(k_z)}{K(0)} = \frac{3\omega_p^2}{k_z^2 v_F^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega \omega_p^2}{k_z^3 v_F^3} \ln \frac{\omega + k_z v_F}{\omega - k_z v_F}. \quad (23)$$

Gl. (21) geht für kleine Werte von  $k$  offenbar in Gl. (16) über, da

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\pi} \frac{1}{k^2 + k_z^2} = \delta(k_z)$$

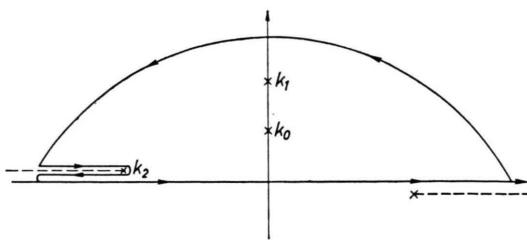
ist. Für  $k \neq 0$  verschwindet die rechte Seite in (21) jedoch nicht, wenn man von dem trivialen Fall  $n(z) \equiv 0$  absieht. Daher erhält man aus (21) als Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenzen:

$$1 = -\frac{k}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{k^2 + k_z^2} \frac{1}{1 + A(k, k_z)}. \quad (24)$$

Das Integral lässt sich durch Konturintegration berechnen. Die Singularitäten des Integranden in (24) sind die Pole  $k_0 = \pm ik$  und die Pole  $k_1$ , die durch die Nullstellen von  $1 + A(k, k_z)$  gegeben sind. Dazu kommen die beiden Verzweigungspunkte, die für kleine  $k$  nach (23) in der Umgebung von

$$k_2 = \pm \frac{1}{v_F} (\omega - i\gamma) \quad (25)$$

liegen werden, wenn man die Stoßdämpfung explizit angibt. Die komplexe  $k_z$ -Ebene wird daher in der in Abb. 1 angedeuteten Weise aufgeschnitten.



Der Integrationsweg verläuft in der oberen Halbebene und muß, da  $\gamma > 0$  ist, in der angegebenen Weise um den Verzweigungsschnitt geführt werden. Die Eigenfrequenz der Oberflächenwelle interessiert nur in niedrigster Ordnung von  $k$ . Dann kann man offenbar in (24)  $A(k, k_z)$  durch  $A(0, k_z)$  ersetzen. Ferner wird die Integration um den Verzweigungsschnitt für  $\gamma = 0$  ausgeführt, da  $\omega_p \gg \gamma$ .

Das Residuum des Integranden in (24) an der Stelle  $k_z = ik$  ist

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{1 - (\omega_p^2/\omega^2)} + O(k^4).$$

Der Pol  $k_1$  bestimmt sich in niedrigster Näherung aus

$$1 = 2 K(k_z)/K(0), \quad (26)$$

da  $\omega^2 \cong \omega_p^2/2$  ist. Die Lösungen von (26) sind rein imaginär ( $\gamma = 0$ ). Mit der Substitution

$$u_1 = i\sqrt{2} k_z v_F / \omega_p$$

schreibt sich (26)

$$u_1 = \operatorname{tg} \left\{ u_1 \left( 1 - \frac{u_1^2}{6} \right) \right\}.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen  $u_1 \cong \pm 1,3741$ . Die anderen Lösungen von (26) liegen auf anderen RIEMANNSchen Blättern und gehören nicht zum Hauptzweig des Integranden von (24). Das Residuum des Integranden bei  $k_z = k_1$  ist

$$i \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \frac{k v_F}{\omega_p |u_1|} \frac{u_1^2 + 1}{u_1^2 - 1}.$$

Das Integral um den Verzweigungsschnitt läßt sich nicht explizit ausführen. Man erhält aus (24) insgesamt in niedrigster Ordnung von  $k$ :

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} \left[ 1 + \sqrt{2} \frac{k v_F}{\omega_p} \left( \frac{u_1^2 + 1}{3 |u_1| (u_1^2 - 1)} + 3i\sigma \right) \right] \quad (27)$$

$$\text{mit } \sigma = \int_1^\infty \frac{x \, dx}{\left( x^3 + 6x + 3 \ln \frac{x-1}{x+1} + 9\pi^2 \right)^2} \cong 1,40 \cdot 10^{-2},$$

so daß annähernd

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} \left( 1 + \frac{k v_F}{\omega_p} (1,1156 + 6,14 \cdot 10^{-2} i) \right)$$

ist. RITCHIE<sup>3</sup> erhält statt dessen:

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{k v_F}{\omega_p} \right); \sqrt{\frac{6}{5}} \cong 1,0954.$$

Die Frequenz der Oberflächenwelle hängt nach (27) in erster Näherung linear vom Wellenvektor ab. Der Realteil der Frequenz stimmt annähernd mit der Frequenz überein, die sich in der hydrodynamischen Näherung<sup>3</sup> ergibt. Dazu tritt eine Dämpfung auf, die in erster Näherung linear mit  $k$  zunimmt, wohingegen die LANDAU-Dämpfung der gewöhnlichen Plasmawellen für  $k v_F < \omega$  verschwindet, wie man auch aus (16) entnehmen kann (mit  $k = k_z$ ). Die übliche Interpretation der LANDAU-Dämpfung als CERENKOV-Strahlung<sup>2</sup> scheint daher bei der Dämpfung der Oberflächenwellen nicht zutreffend zu sein.

Es ist bekannt<sup>8</sup> und verständlich, daß man auf dem hier begangenen Wege nur die zeitlich gedämpften Lösungen der an sich allein interessierenden *stoßfreien* BOLTZMANN-VLASOV-Gleichung (1) bekommt, da man diese als den Grenzfall  $\gamma = 0+$  der Gl. (1) behandelt. Dem entspricht die Wahl des Integrationsweges in Abb. 1. Der Limes  $\gamma = 0+$  ergibt somit die physikalisch sinnvollen Lösungen von (1) mit  $\gamma = 0$ . Man verifiziert das auch leicht an der LANDAU-Dämpfung der normalen Plasmawellen, die man aus (15) und (16) mit dem richtigen Vorzei-

chen erhält, wenn man verwendet, daß

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \ln(x - i\gamma) = \ln|x| - i\pi \quad \text{für } x < 0 \text{ ist.}$$

Die hier diskutierte Oberflächenwelle ist nicht im mathematischen Sinn eine Eigenlösung der BOLTZMANN-VLASOV-Gleichung, da es sich bei dem durch (1) und (2) gestellten Problem um ein Anfangswertproblem handelt, dessen Lösungen von der Anfangsverteilung  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t=0)$  abhängen, so daß kein Zusammenhang zwischen  $\omega$  und  $k$  bestehen kann. Die Oberflächenwelle ist vielmehr eine asymptotische Lösung von (1) für große Zeiten. Die Situation ist daher die gleiche wie bei dem homogenen Plasma<sup>8,9</sup>. Am einfachsten sieht man das, wenn man analog zu LANDAU<sup>9</sup> die LAPLACE-Transformierte der Gl. (1) behandelt, um die Anfangsverteilung explizit zu erhalten. Man kommt dann wieder zu der gleichen Integralgleichung (19), nur daß diese dazu einen inhomogenen Anteil enthält, der durch die Anfangsverteilung gegeben ist. Diese läßt sich wieder bei der vorausgesetzten spiegelnden Reflexion lösen, so daß man die LAPLACE-Transformierte der Verteilungsfunktion berechnen kann. Die asymptotische Lösung für große Zeiten ergibt sich aus den Polen der LAPLACE-Transformierten. Wenn man voraussetzt, daß die Anfangsverteilung  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t=0)$  hinreichend glatt ist und somit keine Singularitäten in der LAPLACE-Transformierten erzeugt, findet man, daß die durch die Dispersionsgleichung (24) gegebenen Frequenzen die einzigen Pole der LAPLACE-Transformierten sind und somit die asymptotische Lösung von (1) und (2) bestimmen. Da dieser so skizzierte Weg zu dem gleichen Resultat führt, wird die Rechnung nicht explizit vorgeführt.

Das Feld im Außenraum  $z < 0$  einer Oberflächenwelle klingt nach (5) exponentiell mit dem Abstand von der Oberfläche ab ( $\sim e^{kz}$ ); das ist einfache Folge der im Außenraum geltenden LAPLACE-Gleichung<sup>10</sup>. Im Innenraum  $z > 0$  gilt jedoch kein einfaches Exponentialgesetz für das Feld oder die Elektronendichte. Um das zu sehen, wird der Einfachheit halber der Fall  $k = 0$  betrachtet. Mit der Normierung  $n_0 = 1/\pi$  folgt aus (16) für die Elektronendichte:

$$n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(k_z)}{2K(k_z) - K(0)} e^{ik_z z} dk_z. \quad (28)$$

<sup>8</sup> N. G. VAN KAMPEN, Physica **21**, 949 [1955].

<sup>9</sup> L. LANDAU, J. Phys. USSR **10**, 25 [1946].

<sup>10</sup> E. A. STERN u. R. A. FERRELL, Phys. Rev. **120**, 130 [1960].

Dabei ist die Zeitabhängigkeit weggelassen worden. Das Integral wird wieder durch Konturintegration ausgewertet. Schließt man den Integrationsweg in

der oberen Halbebene, so kommt man wieder zu der in Abb. 1 skizzierten Kontur. Man erhält dann für (28) :

$$n(z) = \frac{1}{3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2} v_F} \frac{|u_1| (u_1^2 + 1)}{u_1^2 - 1} \exp \left\{ - \frac{\omega_p}{\sqrt{2} v_F} |u_1| z \right\} + 18 \frac{i \omega_p}{\sqrt{2} v_F} \int_1^\infty dx \exp \left\{ - i \frac{\omega_p}{\sqrt{2} v_F} z x \right\} \cdot \frac{x + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}}{\left( x^3 + 6x + 3 \ln \frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 9 \pi^2} \quad (29)$$

Die Dichte nimmt im wesentlichen von einem bestimmten Wert am Rand exponentiell ab und die Eindringtiefe ist etwa durch  $v_F/\omega_p$  gegeben. Dazu kommen rasche Oszillationen der Dichte mit kleiner Amplitude. Ähnliches gilt für das Feld im Metall nach (5). Die Verhältnisse im Metall sind demnach komplizierter, als von STERN und FERRELL<sup>10</sup> angenommen wurde. Integriert man (29) über den Halbraum, so ergibt sich eine bemerkenswerte Integraldarstellung für  $u_1^2$ :

$$\frac{1}{3} \frac{u_1^2 + 1}{u_1^2 - 1} - 1 = 18 \int_1^\infty \frac{dx}{x} \frac{x + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}}{x^3 + 6x + 3 \ln \frac{x-1}{x+1} + 9 \pi^2}.$$

#### 4. Die Schicht

In diesem Paragraphen soll kurz die mit Plasma gefüllte Schicht, die zwischen  $0 \leq z \leq a$  liegen möge, behandelt werden. Die Rechnung verläuft ganz analog zu der in den vorhergehenden Abschnitten, so daß der Rechnungsgang nur angedeutet wird. Die wesentliche Änderung besteht darin, daß an den beiden Wänden bei  $z=0$  und  $z=a$  spiegelnde Reflexion angenommen wird. Das hat zur Folge, daß die aus den Randbedingungen zu bestimmende Funktion  $F(\mathbf{v})$  in (6) unabhängig vom Vorzeichen von  $v_z$  wird. Man erhält für  $F(\mathbf{v})$  in diesem Fall:

$$-2iF(\mathbf{v}) \sin \frac{\tilde{\omega}}{v_z} a = \frac{e}{m v_z} \int_0^a dz' [\exp\{i(\tilde{\omega}/v_z)(z'-a)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla \mathbf{v}) f_0 + \exp\{-i(\tilde{\omega}/v_z)(z'-a)\} (\mathbf{E}(z'), \nabla \mathbf{v}) f_0]. \quad (30)$$

Die obere Integrationsgrenze ist natürlich durch die Schichtdicke gegeben. Von diesem Umstand abgesehen sind die Ausgangsgleichungen für den Halbraum und die Schicht gleich. Für die gestörte Elektronendichte  $n(z)$  ergibt sich wieder eine lineare homogene Integralgleichung. Aus (5), (6) und mit (30) erhält man nach einigen partiellen Integrationen:

$$n(z) = \int_0^z K_0(z, z') n(z') dz' + \int_0^a K_1(z, z') n(z') dz' + K_2(z-a) \int_0^a n(z') e^{-kz'} dz' \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } K_0(z, z') &= -\frac{4\pi e^2}{m} \omega \int \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \sin \frac{\tilde{\omega}}{v_z} (z-z') \frac{d\mathbf{v}}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2}, \\ K_1(z, z') &= -\frac{4\pi e^2}{m} \omega \int \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\cos(\tilde{\omega}/v_z) z}{\sin(\tilde{\omega}/v_z) a} \cos \frac{\tilde{\omega}}{v_z} (z'-a) \frac{d\mathbf{v}}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2}, \\ K_2(z) &= \frac{2\pi e^2}{m} \omega \int \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\cos(\tilde{\omega}/v_z) z}{\sin(\tilde{\omega}/v_z) a} \frac{d\mathbf{v}}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Die Integralgleichung läßt sich offenbar wieder in die untere  $z$ -Ebene fortsetzen, wenn man wie in Teil 2  $n(-z) = n(+z)$  definiert. Die Lösung der Gl. (31) erhält man dann durch Zerlegung von  $n(z)$  in eine

FOURIER-Reihe mit der Periode  $2a$ :

$$n(z) = \sum_{k_z} n_{k_z} e^{ik_z z}, \quad n_{k_z} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} n(z) e^{-ik_z z} dz, \quad k_z = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Damit ergibt sich aus (31) mit (32) :

$$n_{k_z} (1 + A(k, k_z)) = \frac{1 - e^{-ka} \cos k_z a}{2a} A(k, k_z) \sum_{k_z'} \frac{k}{k^2 + k_z'^2} n_{k_z'} (1 + \cos k_z a \cos k_z' a), \quad (33)$$

wobei  $A(k, k_z)$  wieder durch (22) definiert ist. Er-sichtlich zerfallen die Lösungen von (33) in zwei Klassen, je nachdem, ob  $k_z$  ein gerades oder ein un-gerades Vielfaches von  $\pi/a$  ist. Der ersten Klasse entsprechen die symmetrischen Lösungen,

$$n(a-z) = n(z)$$

und der zweiten die antisymmetrischen,

$$n(a-z) = -n(z).$$

Geht man in (33) mit  $k \rightarrow 0$ , so verschwindet im antisymmetrischen Fall die rechte Seite von (33), da  $k_z' \neq 0$  ist. Man erhält daher die schon in Teil 2 diskutierte Dispersionsrelation der normalen Plasma-wellen  $1 + A(0, k_z) = 0$ . Im symmetrischen Fall er-gibt in der Summe von (33) nur der FOURIER-Koef-fizient mit  $k_z' = 0$  evtl. einen nicht verschwindenden Beitrag. Mit  $n_0 = 0$  ergibt sich wieder die normale Plasmawelle und mit  $n_0 \neq 0$  erhält man offenbar keine nichtriviale Lösung, s. u.

Ist  $k \neq 0$ , so hat man als Eigenwertgleichung aus (33) zunächst:

$$1 = \frac{1 \mp e^{-ka}}{a} \sum_{k_z} \frac{k}{k^2 + k_z^2} \cdot \frac{A(k, k_z)}{1 + A(k, k_z)}. \quad (34)$$

Das obere bzw. das untere Vorzeichen bezieht sich auf die symmetrische bzw. auf die antisymmetrische Lösung. Mit der bekannten Darstellung des  $\coth \pi z$ :

$$\pi \coth \pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + n^2}$$

kann man die Gl. (34) umformen, so daß für beide Lösungsklassen die gleiche Eigenwertgleichung gilt:

$$1 = -\frac{2}{a} \sum_{k_z} \frac{k}{k^2 + k_z^2} \cdot \frac{1}{1 + A(k, k_z)}. \quad (35)$$

Diese geht offensichtlich in Gl. (24), die für den Halbraum gilt, über, wenn man  $a \rightarrow \infty$  gehen läßt und die Summe in ein Integral verwandelt.

Bei kleinen Schichtdicken,  $a k \ll 1$ , hat (35) für die antisymmetrische Klasse ( $k_z \neq 0$ ) keine Lösung, für die symmetrische erhält man den schon von RITCHIE<sup>3</sup> und KANAZAWA<sup>4</sup> angegebenen Eigenwert

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} a k + o(a k).$$

Faßt man die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen, so ist zu sagen, daß die bisherige Behandlung des Spektrums der Oberflächenwellen in einem Elektronenplasma unzureichend ist. Zwar zeigt sich, daß in Übereinstimmung mit der hydrodynamischen Näherung von RITCHIE und im Gegensatz zu KANAZAWAS Resultat die Abhängigkeit der Frequenz der Oberflächenwelle vom Wellenvektor in erster Näherung linear ist; jedoch findet sich neben einem geringen Unterschied im Realteil der Eigenfrequenzen eine relativ starke Dämpfung der Oberflächenwellen, die in der hydrodynamischen Näherung vernachlässigt wird. Diese Dämpfung ist offenbar von einem anderen Typ als die LANDAU-Dämpfung, wenn man diese als CERENKOV-Strahlung interpretiert. Damit in Zu-sammenhang steht, daß die Amplitude der Oberflächenwellen nicht rein exponentiell vom Rand ab-nimmt, sondern daß sich dem exponentiellen Abfall kleine Oszillationen der Dichte überlagern.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor SAUTER für zahlreiche Diskussionen und für die kritische Durchsicht des Manuskripts herzlich danken.

## Anhang

Setzt man (5) in (10) ein, so ergibt sich zunächst:

$$n(z) = -\frac{2\pi i e^2}{m k} \int_{v_z > 0} \frac{d\mathbf{v}}{v_z} (\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 \left\{ \int_0^z dz' \exp \{i(\tilde{\omega}/v_z)(z' - z) + kz'\} \int_{z'}^{\infty} dz'' n(z'') e^{-kz''} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_z^\infty dz' \exp \left\{ -i(\tilde{\omega}/v_z) (z' - z) - k z' \right\} \int_0^{z'} dz'' n(z'') e^{kz''} \Big\} \\
& - \frac{2\pi i e^2}{m k} \int_{v_z > 0} \frac{d\mathbf{v}}{v_z} (\boldsymbol{\kappa}^*, \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 \left\{ \int_0^z dz' \exp \left\{ i(\tilde{\omega}/v_z) (z' - z) - k z' \right\} \int_0^{z'} dz'' n(z'') e^{kz''} \right. \\
& \quad \left. + \int_z^\infty dz' \exp \left\{ -i(\tilde{\omega}/v_z) (z' - z) + k z' \right\} \int_{z'}^\infty dz'' n(z'') e^{-kz''} \right\} \\
& - \frac{2\pi i e^2}{m k} p \int_{v_z > 0} \frac{d\mathbf{v}}{v_z} \int_0^\infty dz' \exp \left\{ -i(\tilde{\omega}/v_z) (z + z') \right\} \left\{ (\boldsymbol{\kappa}, \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 e^{-kz'} \int_0^{z'} dz'' n(z'') e^{kz''} \right. \\
& \quad \left. + (\boldsymbol{\kappa}^*, \nabla_{\mathbf{v}}) f_0 e^{kz'} \int_{z'}^\infty dz'' n(z'') e^{-kz''} \right\}.
\end{aligned}$$

Integriert man partiell und faßt man zusammen, dann erhält man mit  $\nabla_{\mathbf{v}} f_0 = \frac{\mathbf{v}}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v}$ :

$$\begin{aligned}
n(z) = & - \frac{2\pi e^2}{m k} \int_{v_z > 6} d\mathbf{v} \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v})}{\omega - (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v})} \int_0^\infty dz' n(z') e^{-k|z-z'|} \\
& - \frac{4\pi i e^2}{m} \omega \int_{v_z > 0} d\mathbf{v} \frac{v_z}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2} \int_0^\infty dz' n(z') \left\{ \exp \left\{ -i(\tilde{\omega}/v_z) |z-z'| \right\} + p \exp \left\{ -i(\tilde{\omega}/v_z) (z+z') \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\pi e^2}{m k} \int_{v_z > 9} d\mathbf{v} \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\exp \left\{ -i(\tilde{\omega}/v_z) z \right\}}{\tilde{\omega}^2 + k^2 v_z^2} \int_0^\infty dz' n(z') e^{-kz'} \left\{ (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}) (\omega - (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v})) - p (\boldsymbol{\kappa}^* \mathbf{v}) (\omega - (\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v})) \right\} \right\}. \quad (\text{A } 1)
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\gamma$  in die Frequenz  $\omega$  hineingezogen worden. Für  $p=1$  geht (A 1) offensichtlich in die Gln. (19) und (20) über, wenn man beachtet, daß das erste Integral verschwindet, da

$$\int \frac{(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v})}{\omega - \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}} d\Omega_{\mathbf{v}} = 0$$

ist, wenn man über eine Kugel mit dem Radius  $v_F$  im Geschwindigkeitsraum integriert;  $d\Omega_{\mathbf{v}}$  ist das Raumwinkellement.

Setzt man  $k=0$  in Gl. (A 1), so lassen sich die Integrationen teilweise ausführen. Man führt im  $\mathbf{v}$ -Raum Polarkoordinaten ein und nimmt die  $z$ -Achse als Polarachse. Die Integration über den Betrag von  $\mathbf{v}$  läßt sich bei vollständiger Entartung leicht durchführen. Mit der Normierung (10) folgt

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = - \frac{3 n_0}{4 \pi v_F^3} \delta(v - v_F)$$

und man erhält aus (A 1)

$$\begin{aligned}
n(z) = & \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega v_F} i \left\{ \int_0^\infty dz' n(z') \int_0^1 x dx \left\{ \exp \left\{ -i(\omega/v_F x) |z-z'| \right\} + p \exp \left\{ -i(\omega/v_F x) (z+z') \right\} \right\} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1+p}{2} \int_0^1 x dx \exp \left\{ -i(\omega/v_F x) z \right\} \int_0^\infty n(z') dz' \right\}. \quad (\text{A } 2)
\end{aligned}$$

Mit der Substitution  $s=1/x$  folgen hieraus die Gln. (12) und (13).